Tentamen Gewone differentiaalvergelijkingen, 06-04-04, 9-12, Examenhal.

(1) Toon aan dat de substitutie $v = \log y$ de differentiaalvergelijking $y' + P(x)y\log y + Q(x)y = 0$ omzet in een lineaire differentiaalvergelijking. Los hiermee op: $xy' + 2y\log y - 4x^2y = 0,\ y(1) = 1$.

(2) Toon aan dat $(7x^3 + 3x^2y + 4y)dx + (4x^3 + x + 5y)dy$ niet exact is. Bewijs, door berekening, dat door vermenigvuldiging met een geschikte funktie van de vorm $\phi(x+y)$ een exacte vorm verkregen wordt. Los ten slotte de differentiaalvergelijking op. Hint: $4x^3 + x + 5y = 4x^3 - 4x + 5(x+y)$.

(3) Toon aan dat voor elke $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ er precies één oplossing is van het beginwaardeprobleem: $y' = \sqrt{x^2+y^2},\ y(x_0) = y_0$, en dat de oplossing gedefiniëerd is op het hele interval $(-\infty, \infty)$. Welke stelling(en) gebruikt u?

(4) Teken het fase portret van het autonome stelsel $x' = 2y,\ y' = -xe^{-x}$. Wat is het stationaire punt? Is dat stabiel? Hint: Bereken de differentiaalvergelijking van y als funktie van x en los die op.

(5) Bepaal alle oplossingen van $y''' - y'' + y' - y = 4\sin x$.

(6) Leid de formule af voor de algemene oplossing van het eerste orde stelsel $y' = A(x)y + b(x)$ met beginvoorwaarde $y(x_0) = y_0$ in termen van de bekend veronderstelde fundamentaalmatrix $F(x)$ voor $y' = A(x)y$.

(7) Bereken een fundamentaalmatrix voor $y' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} y$.

(8) L is de differentiaaloperator gegeven door $Ly = x^2y'' + 2xy' - 2y$.
(a) Vind een basis van de oplossingen door Lx^λ te berekenen.
(b) Bewijs dat voor elke continue functie $f : [1,2] \to \mathbf{R}$ er een unieke oplossing z van $Lz = f$ bestaat met $z(1) = z(2) = 0$.
(c) Geef de formule voor de funktie van Green voor L en het segment $[1,2]$.
(d) Geef de formule voor z uit (b) in termen van de funktie van Green.

(9) L is de differentiaaloperator $x^2(\frac{d}{dx})^2 + x^3\frac{d}{dx} + x^4$.
(a) Bereken de geadjungeerde L^* van L ten opzichte van de Dirichlet randvoorwaarden en het gewone inproduct voor funkties op het segment $[a,b]$, d.w.z. gegeven door $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$.
(b) L is de differentiaaloperator $-(\frac{d}{dx})^2 + 4$ werkend op de ruimte V van de C^2-funkties $v : [0,1] \to \mathbf{R}$ die voldoen aan $v(0) = v(1) = 0$. Bereken de eigenwaarden van L, d.w.z. de λ waarvoor er een $v \in V$ is met $v \neq 0$ en $Lv = \lambda v$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$

$\lambda = 1$ met mult 2 en $\lambda = 3$ met mult 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 4n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 4n = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$

Naam: Thomas ten Cate
Adres: Aquamarijnstraat 419
Postcode en
Woonplaats: 9743 PK Groningen

Studentnummer: 1338862
Studierichting: Informatica & Wiskunde
Jaar van eerste inschrijving: 2002

Bladnr.: 1
Tentamen: Gewone Differentiaal vgl.
Datum: 06-04-2004
Naam docent: van der Put

1 $y' + P(x) y \log y + Q(x) y = 0$

~~[illegible]~~ $v(y) = \log y$

$y = e^v \Rightarrow y' = v' e^v$

$v' e^v + P(x) e^v v + Q(x) e^v = 0$

Omdat $\forall v: e^v \neq 0$ geldt:

$v' + P(x) v + Q(x) = 0$

$x y' + 2y \log y - 4x^2 y = 0, \quad y(1) = 1$

$y' + \frac{2}{x} y \log y - 4x y = 0$

$P(x) = \frac{2}{x}, \quad Q(x) = -4x$

$v' + \frac{2}{x} v - 4x = 0$

~~[illegible]~~ $v' + \frac{2}{x} v = 4x$

$h' + \frac{2}{x} h = 0$

$h' = \frac{-2}{x} h$

$\frac{h'}{h} = \frac{-2}{x}$

$\int \frac{h'}{h} dx = \int \frac{-2}{x} dx$

$\log |h| = -2 \log |x| + c_1 = \log(|x|^{-2} \cdot c_2)$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $|h| = c_2 |x|^{-2}$

~~[illegible]~~ Stel $h, x > 0$:

$h(x) = c_2 \frac{1}{x^2}$

$p(x) = C(x) \frac{1}{x^2}$

$p'(x) = C'(x) \frac{1}{x^2} - 2 C(x) \frac{1}{x^3}$

$p'(x) + \frac{2}{x} p(x) = 4x$

$C'(x) \frac{1}{x^2} - 2C(x) \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} C(x) \frac{1}{x^2} = C' \frac{1}{x^2} - 2C \frac{1}{x^3} + 2C \frac{1}{x^3} = C' \frac{1}{x^2} = 4x$

$C'(x) = 4x^3$

$C(x) = \int 4x^3 \, dx = x^4 + C_3$

$p(x) = (x^4 + C_3) \frac{1}{x^2} = x^2 + C_3 \frac{1}{x^2}$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~voor willekeurige C_3 [illegible]~~

~~[illegible]~~ $\frac{1}{x^2}$ zit al in de homogene oplossing, dus we hebben als particuliere oplossing:

$p(x) = x^2$

De volledige oplossing voor v is dan:

$v(x) = h(x) + p(x) = C_2 \frac{1}{x^2} + x^2$

$y(1) = 1 \Rightarrow v(y(1)) = \log y(1) = \log 1 = 0 \Rightarrow v(1) = 0$

$v(x) = c_2 \frac{1}{x^2} + x^2$, $v(1) = 0$

$c_2 \frac{1}{1^2} + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$

$v(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

$y(x) = e^{v(x)} = e^{x^2 - \frac{1}{x^2}}$

8 ~~$\frac{dy}{dx}$ [illegible]~~

~~$b(x,y) = 4x^2 + 2 + 5y$~~

~~$\frac{da}{dy} = 2x^2 + 4$~~

~~$\frac{db}{dx} = 12x^2 + 1$~~

~~$\frac{da}{dy} \neq \frac{db}{dx}$ dus niet exact~~

13 ~~$y' = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(x_0) = y_0$~~

5 a $y''' - y'' + y' - y = 4 \sin x$

$h''' - h'' + h' - h = 0 \Rightarrow h''' = h'' - h' + h$

$$\begin{pmatrix} h \\ h' \\ h'' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ h' \\ h'' \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda - 1) - 1 + \lambda = \cancel{\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1}$$

$= (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$

$h_1(x) = e^x$

$h_2(x) = \sin x$

$h_3(x) = \cos x$

$h(x) = c_1 e^x + c_2 \sin x + c_3 \cos x$

~~$p(x) = c_4(x \sin x)$~~

~~$p'(x) = c_4(\sin x + x \cos x)$~~

~~$p''(x) = c_4(\cos x + \cos x - x \sin x) = c_4(2\cos x - x \sin x)$~~

~~$p'''(x) = c_4(-2\sin x - \sin x - x \cos x) = c_4(-3 \sin x - x \cos x)$~~

~~$p''' - p'' + p' - p = 4 \sin x$~~

~~$c_4(\ldots)$~~

dit is blijkbaar een fokje → $p(x) = c_4 x \sin x + c_5 x \cos x$

$p'(x) = c_4(\sin x + x \cos x) + c_5(\cos x - x \sin x)$

$p''(x) = c_4(\cos x + \cos x - x \sin x) + c_5(-\sin x - \sin x - x \cos x)$

$\quad = c_4(2 \cos x - x \sin x) + c_5(-2 \sin x - x \cos x)$

$p'''(x) = c_4(-2 \sin x - \sin x - x \cos x) + c_5(-2 \cos x - \cos x + x \sin x)$

$\quad = c_4(-3 \sin x - x \cos x) + c_5(-3 \cos x + x \sin x)$

$p''' - p'' + p' - p = 4 \sin x$

$(-3c_4 + 2c_5 + c_4) \sin x + (-3c_5 - 2c_4 - c_5) \cos x$

$+ (c_5 + c_4 - c_5 - c_4) x \sin x + (-c_4 + c_5 + c_4 - c_5) x \cos x =$

Naam: Thomas ten Cate
Adres: Aquamarijnstraat 419
Postcode en
Woonplaats: 9743 PK Groningen

Studentnummer: 1338862
Studierichting: Informatica & Wiskunde
Jaar van eerste inschrijving: 2002

Tentamen: Gewone Differentiaalvgl.
Datum: 06-04-2004
Naam docent: van der Put

5 (vervolg)

$= (-2C_4 + 2C_5)\sin x + (-4C_5 - 2C_4)\cos x = 4\sin x$

rekenfout

$-2C_4 + 2C_5 = 4$

$-4C_5 - 2C_4 = 0 \Rightarrow -4C_5 = 2C_4 \Rightarrow C_5 = -\frac{1}{2}C_4$

$-2C_4 - C_4 = 4 \Rightarrow -3C_4 = 4 \Rightarrow C_4 = -\frac{4}{3} \Rightarrow C_5 = \frac{2}{3}$

$p(x) = -\frac{4}{3}x\sin x + \frac{2}{3}x\cos x$

$y(x) = h(x) + p(x) = c_1e^x + c_2\sin x + c_3\cos x - \frac{4}{3}x\sin x + \frac{2}{3}x\cos x$

dit klopt niet

6 $y' = A(x)y + b(x)$

$y' = A(x)y$ heeft fundamentaalmatrix $F(x)$, dus $h(x) = F(x)c$ met c een vector van constanten is een oplossing:

$h' = A(x)h$

$F'(x)c = A(x)F(x)c$

$F'(x) = A(x)F(x)$

$y = h + p \Rightarrow y' = h' + p'$

$h' + p' = A(x)(h+p) + b(x) = A(x)h + A(x)p + b(x)$

$p' = A(x)p + b(x)$

dit gaat mis

7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -4 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-3) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b \\ b \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ is een eigenvector

$\cancel{\begin{pmatrix} a+4b \\ b \\ 3c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2a+4b \\ 2b \\ 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix} a+4b \\ b \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ is een gegeneraliseerde eigenvector

$$\begin{pmatrix} a+4b \\ b \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ 3c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ is een eigenvector}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Ax} = Q \begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} e^x & 4xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} e^x & 4xe^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$

8a $Ly := x^2 y'' + 2xy' - 2y$

$y = x^\lambda \Rightarrow y' = \lambda x^{\lambda-1} \Rightarrow y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$Lx^\lambda = x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 2x\lambda x^{\lambda-1} - 2x^\lambda$

$= \lambda(\lambda-1)x^\lambda + 2\lambda x^\lambda - 2x^\lambda$

$= (\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2)\, x^\lambda$

$\lambda(\lambda-1) + 2(\lambda-1) = (\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$

$y_1(x) = \cancel{e^x}$ $\quad x$ en x^{-2}

$y_2(x) = \cancel{e^{2x}}$

$\{y_1, y_2\}$ vormt een basis van de oplossingsruimte.

b Dit is waar volgens Fredholm dan en slechts dan als $Lz=0$ alleen $z \equiv 0$ als oplossing heeft.

$z = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

$z(1) = 0 \Rightarrow c_1 e + c_2 e^{-2} = 0 \Rightarrow c_1 e = -c_2 e^{-2} \Rightarrow c_1 = -c_2 e^{-3}$

$z(2) = 0 \Rightarrow c_1 e^2 + c_2 e^{-4} = 0 \Rightarrow c_1 e^2 = -c_2 e^{-4} \Rightarrow c_1 = -c_2 e^{-6}$

$-c_2 e^{-3} = -c_2 e^{-6} \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow z \equiv 0$ dus het homogene probleem heeft alleen de nuloplossing dus is er een unieke oplossing voor het inhomogene probleem.

c $u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$, $u(1) = 0$

$c_1 e + c_2 e^{-2} = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 e^{-3}$, bijv. $c_1 = 1$, $c_2 = -e^3$:

$u(x) = e^x - e^{-2x+3}$

$v(x) = c_3 e^x + c_4 e^{-2x}$, $v(2) = 0$

$c_3 e^2 + c_4 e^{-4} = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 e^{-6}$, bijv. $c_1 = 1$, $c_2 = -e^6$:

$v(x) = e^x - e^{-2x+6}$

$w(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = (e^x - e^{-2x+3})(e^x + 2e^{-2x+6}) - (e^x + 2e^{-2x+3})(e^x - e^{-2x+6})$

$= \cancel{e^{2x}} + 2e^{-2x+7} - e^{-2x+4} - \cancel{2e^{-4x+9}} - (\cancel{e^{2x}} - e^{-2x+7} + 2e^{-2x+4} - \cancel{2e^{-4x+9}})$

$= 3e^{-2x+7} + e^{-2x+4}$

$p(x) = x^2$

Naam: Thomas te Cate
Adres: Aquamarijnstraat 419
Postcode en Woonplaats: 9743 PK

Studentnummer: 1338862
Studierichting: Informatica & Wiskunde
Jaar van eerste inschrijving: 2002

Bladnr.: 3
Tentamen: Gewone Differentiaal vgl.
Datum: 06-04-2004
Naam docent: van der Put

8c (vervolg)

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{u(x)\,v(\xi)}{w(\xi)\,p(\xi)} & x \leq \xi \\[2ex] \dfrac{u(\xi)\,v(x)}{w(\xi)\,p(\xi)} & x \geq \xi \end{cases}$$ waarin:

$$\frac{u(x)\,v(\xi)}{w(\xi)\,p(\xi)} = \frac{(e^{x} - e^{-2x+3})(e^{\xi} - e^{-2\xi+6})}{(3e^{-2\xi+7} + e^{-2\xi+4})\,\xi^2}$$

$$\frac{u(\xi)\,v(x)}{w(\xi)\,p(\xi)} = \frac{(e^{\xi} - e^{-2\xi+3})(e^{x} - e^{-2x+6})}{(3e^{-2\xi+7} + e^{-2\xi+4})\,\xi^2}$$

d $z(x) = \int_1^2 G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi$

9a $L = x^2\partial^2 + x^3\partial + x^4$

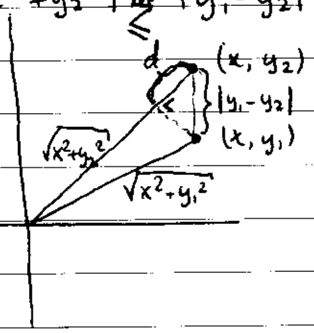
$L^* = x^2\partial^2 \cancel{- x^3\partial + x^4}$ $\qquad \partial^2 x^2 - \partial x^3 + x^4 = \ldots$

3 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ heeft een unieke oplossing op (a,b) voor $y(x_0) = y_0$ als $f(x,y)$ Lipschitz-continu is in y, en de Lipschitz-constante $C<1$ is, voor $y_1 \neq y_2$.

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq C\,|y_1 - y_2|$

$d = |\sqrt{x^2+y_1^2} - \sqrt{x^2+y_2^2}| \leq |y_1 - y_2|$, want voor $y_1 \neq y_2$:



Er bestaat dan een contractie F met als vast punt $F(y) = y$ de unieke oplossing.

4 Stationair punt:

$x' = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$y' = -xe^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$

Dus $(0,0)$ is het stationaire punt

$x'' = 2y' = -2xe^{-x} \ldots$